

Stjepan Risović

# Naprezanja u listu kružne pile određena metodom konačnih elemenata

## Stress in circular saw blade by finite element method

*Izvorni znanstveni rad • Original scientific paper*

*Prispjelo - received: 02. 12. 2000. • Prihvaćeno - accepted: 05. 12. 2000.*

*UDK 630\*822.33*

**SAŽETAK** • *Budući da je dinamičko ponašanje lista kružne pile dovoljno istraženo, postignuti su rezultati dobar temelj za razumijevanje zadaća vezanih uz naprezanja uobičajenih listova kružnih pila. Navedene spoznaje treba primijeniti pri proizvodnji i uporabi kružnih pila kako bi se postigli što bolji učinci postupka piljenja: manja hrapavost bočnih obradbenih ploha, manja širina propiljka, manji utrošak osnovnoga materijala i energije za njegovu pretvorbu i dr.*

*U radu se iznose rezultati izračuna radijalnoga i cirkularnoga naprezanja u listu kružne pile zbog centrifugalne sile. Sva su izračunana naprezanja vlačna. Najveće radijalno naprezanje nastaje neposredno uz prirubnice i gotovo se linearno smanjuje na nulu na rubu lista pile. S povećanjem promjera prirubnice smanjuje se radijalno naprezanje. Najveća cirkularna naprezanja u promatranome primjeru uočena su neposredno uz prirubnicu prema, rubu lista kružne pile.*

*U skladu s postavljenim ciljevima primjenom metode konačnih elemenata napravljen je izračun naprezanja u predjelu ozubljenja zbog sile rezanja i centrifugalne sile. Svaki je list pile modeliran pomoću približno 9 000 konačnih elemenata. Za modeliranje geometrije lista pile primijenjeni su 3D shell elementi. Model kružne pile opterećen je istodobnim djelovanjem centrifugalnih sila koje odgovaraju frekvenciji vrtnje od  $3\ 000\ \text{min}^{-1}$ , dok su zubi pile opterećeni silom koja djeluju na rezu površinu zuba u ukupnom iznosu od 100 N. Proračun je proveden programskim paketom Algor, a ekvivalentna su naprezanja prikazana prema energetskoj teoriji čvstće (HMH). Naprezanje u listu pile zbog djelovanja centrifugalne sile i opterećenja zubi pile kretalo se do 60 MPa.*

**Ključne riječi:** *kružna pila, naprezanje lista pile, metoda konačnih elemenata, centrifugalna sila.*

---

Autor je docent na Šumarskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

Author is an assistant professor at the Faculty of Forestry of the Zagreb University.



metoda konačnih elemenata našla u mnogim tehničkim disciplinama treba pripisati razvoju elektroničkih računala velikih memorija koja su sposobna rješavati sustave s velikim brojem linearnih jednadžbi. Tom se metodom elastično tijelo (ili općenito neki kontinuum) dijeli u niz dijelova određenog oblika (konačni elementi) za koje se zamišlja da su međusobno spojeni u čvornim točkama te na taj način tvore osnovno tijelo. Pri tome se rabe različiti oblici elemenata: trokut, pravokutnik, tetraedar i slično, ovisno o tome je li problem ravninski ili prostorni, te o kakvoj je konturi tijela riječ. Za svaki se element kao rješenje pretpostavlja neka funkcija (npr. u obliku polinoma) kojoj su rubne vrijednosti čvorne točke u kojima je zamišljeno da se elementi spajaju. Iprimito se računanjem vrijednosti pretpostavljene funkcije u pojedinim čvorovima dolazi do sustava linearnih jednadžbi, kojih rješenja daju vrijednosti pomaka i sila u čvorovima.

S razvojem elektroničkih računala velike memorije i brzine računanja metoda konačnih elemenata našla je primjenu u mnogim tehničkim disciplinama.

Gorman i dr. (1980) rotirajuću su kružnu ploču toplinski opteretili i mjerili poprečne vibracije. Rezultati dobiveni pokusom za različite debljine ploče ( $H$ ), kutne brzine, brojeve čvornih promjera ( $n$ ) i čvornih krugova ( $m$ ) uspoređivani su s izračunanim vrijednostima metodom konačnih elemenata.

Nicoletti i dr. (1996) metodom konačnih elemenata analiziraju zaostala i stvarna naprezanja u listu kružne pile, njez-

inu vlastitu frekvenciju i ponašanje pri kritičnoj frekvenciji vrtnje.

Metoda konačnih elemenata našla je primjenu i u drvnoj tehnologiji. Aicher i Radovic (1999) istražuju utjecaj oblika klina na čvrstoću zubaca klina izrađenih od uslojenoga drva.

## 2. Svrha i cilj istraživanja 2. Research aims and objectives

Važan dio drvodjeljske djelatnosti jest mehanička obradba drva. Kružne su pile najčešće upotrebljavan alat u mehaničkoj obradbi drva. Rad kružnom pilom redovito je praćen različitim pojavama. Poznato je da su naprezanja u listu kružne pile dio nepoželjnih pojava. Posljedica tog naprezanja, osim smanjenja iskorištenja i lošije kakvoće obradbe, jest i gubitak energije. Budući da je dinamičko ponašanje lista kružne pile dovoljno istraženo, postignuti su rezultati dobar temelj za razumijevanje zadaća vezanih uz naprezanja uobičajenih listova kružnih pila. Navedene spoznaje treba primijeniti pri proizvodnji i uporabi kružnih pila kako bi se postigli što bolji rezultati postupka piljenja; manja hrapavost bočnih obradbenih ploha, manja širina propiljka, manji utrošak osnovnoga materijala i energije za njegovu pretvorbu i dr.

Zbog navedenoga, za obradbu drva kružnom pilom u ciljeve istraživanja uvršteni su:

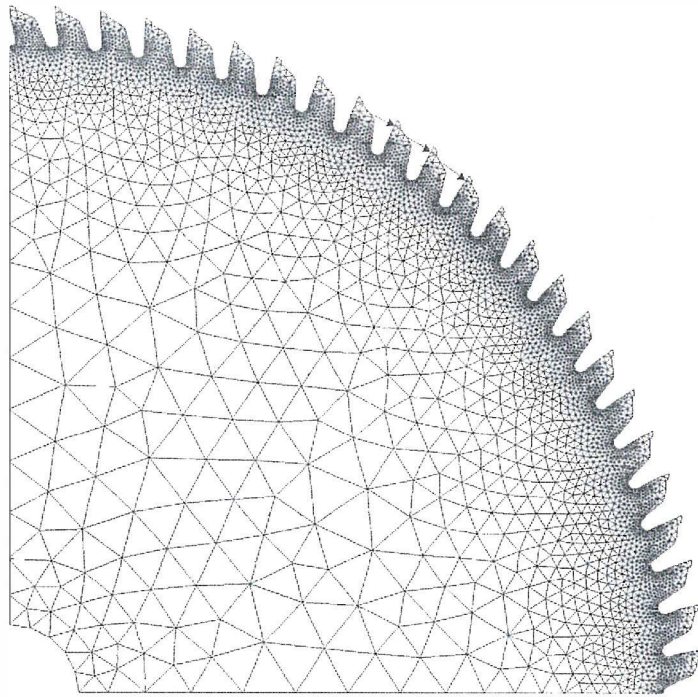
- analiza radijalnoga i cirkularnoga naprezanja u listu kružne pile kao rezultat centrifugalne sile

Obilježje <i>Characteristic</i>	Pila 1. Saw 1	Pila 2. Saw 2	Pila 3. Saw 3	Pila 4. Saw 4	Pila 5. Saw 5	Pila 6. Saw 6	Pila 7. Saw 7
oznaka pile <i>Sample saw</i>	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7
broj zubi - <i>Tooth number</i>	80	96	96	96	60	60	60
tip zuba - <i>Tooth type</i>	WZ	FZ/TR	WZ	WZ	FZ/TR	FZ/TR	FZ/TR
korak zuba, mm <i>Pitch, mm</i>	11,98	9,82	9,82	9,82	11,93-19,47 promjenjiv	15,71	15,71
visina zuba, mm <i>Tooth height, mm</i>	7	8	9	8	9	12	13
geometrija ozubljenja <i>Tooth geometry</i>	$\alpha=36^\circ$ $\beta=46^\circ$ $\gamma=8^\circ$	$\alpha=13^\circ$ $\beta=65^\circ$ $\gamma=12^\circ$	$\alpha=16^\circ$ $\beta=66^\circ$ $\gamma=8^\circ$	$\alpha=22^\circ$ $\beta=61^\circ$ $\gamma=7^\circ$	$\alpha=19^\circ$ $\beta=58^\circ$ $\gamma=13^\circ$	$\alpha=21^\circ$ $\beta=54^\circ$ $\gamma=15^\circ$	$\alpha=16^\circ$ $\beta=59^\circ$ $\gamma=15^\circ$
promjer lista $D_s$ , mm <i>Saw diameter <math>D_s</math>, mm</i>	305	300	300	300	300	300	300
promjer provrta $D_i$ , mm <i>Bore diameter <math>D_i</math>, mm</i>	30	30	30	30	30	30	30
debljina lista, mm <i>Blade thickness, mm</i>	2,2	2,2	2,2	2,5	3,0	2,8	3,0
širina propiljka, mm <i>Sawkerf width, mm</i>	2,8	3,2	3,2	3,5	4,4	4,4	4,4
najveća frekvencija vrtnje lista $n$ , $\text{min}^{-1}$ <i>Maximum blade rotation frequency, <math>\text{min}^{-1}</math></i>	-	7 800	7 800	7 800	7 800	7 800	7 800
promjer valjanja $D_w$ , mm <i>Rolling diameter, mm</i>		190	175	270	165	215	175

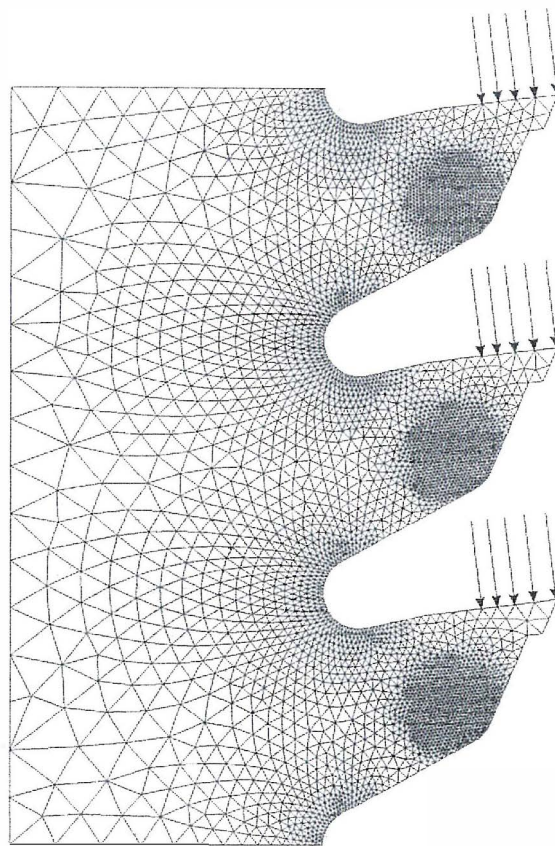
Tablica 1.

Opis ispitivanih uzoraka s ozubljenjem •  
Description of toothed circular saw samples

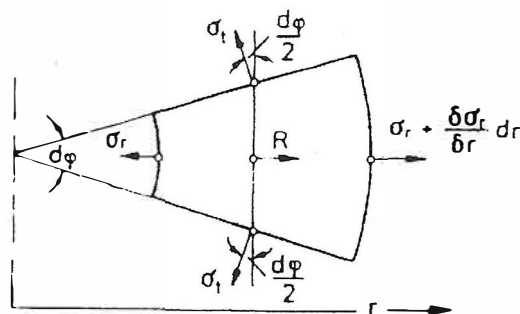




**Slika 3.**  
Mreža konačnih elemenata četvrtine pile 4. • Network of finite elements of a quarter of the saw No. 4



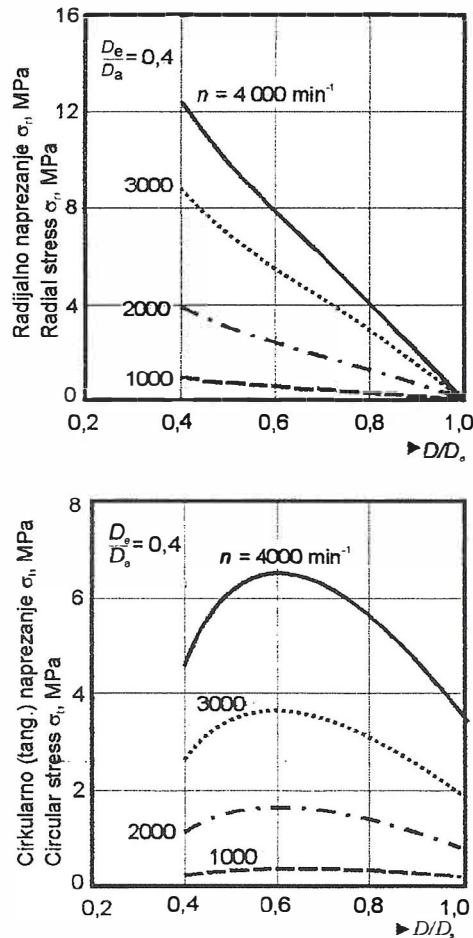
**Slika 4.**  
Konačna mreža detalja zuba pile 4. opterećenih silama • Final network of teeth details of the saw No.4 affected by forces



**Slika 5.**  
Element kružne ploče sa središnjim povrtom u kojemu prevlada ravninsko naprezanje • The circular table unit with flat surface tension

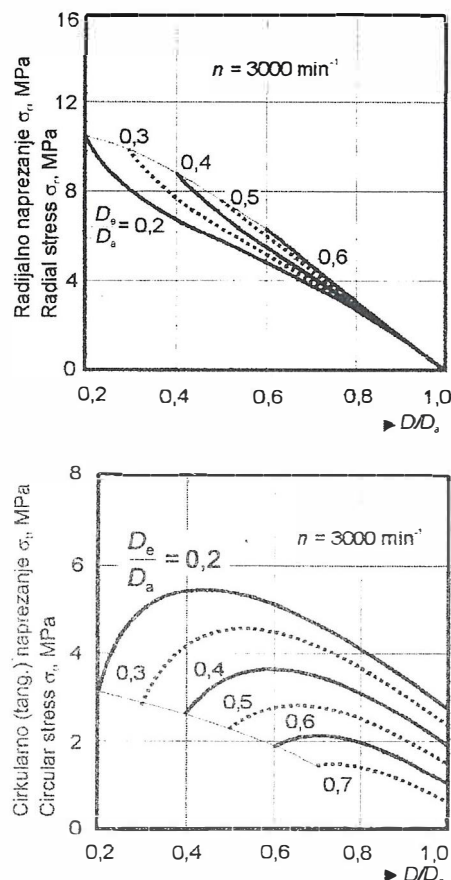
**Slika 6.**

Teorijsko radijalno i cirkularno (tangencijalno) naprezanje u listu kružne pile zbog centrifugalne sile u ovisnosti o odnosu promjera MPa,  $D_a = 300$  mm,  $D_i = 30$  mm,  $D_e$  - promjenjiv • Theoretical radial and circular (tangential) stress in circular saw blade caused by centrifugal force depending on diameter ratio: MPa,  $D_a = 300$  mm,  $D_i = 30$  mm,  $D_e$  - changeable



**Slika 7.**

Teorijsko radijalno i cirkularno (tangencijalno) naprezanje u listu kružne pile zbog centrifugalne sile u ovisnosti o odnosu promjera MPa,  $D_a = 300$  mm,  $D_i = 30$  mm,  $D_e$  - promjenjiv • Theoretical radial and circular (tangential) stress in circular saw blade caused by centrifugal force depending on diameter ratio: MPa,  $D_a = 300$  mm,  $D_i = 30$  mm,  $D_e$  - changeable



Za modeliranje geometrije lista pile primijenjeni su 3D *shell element*i. Svaki list pile modeliran je pomoću približno 9 000 konačnih elemenata. Taj relativno grubi model konačnih elemenata iskorišten je za analizu cijeloga polja naprezanja u listu pile. Složena geometrija zuba pile nije mogla biti izvedena takvim modelom. Model detalja zuba kružne pile riješen je pomoću 2D konačnih elemenata.

Primjer mreže konačnih elemenata za jednu četvrtinu lista pile 4. prikazan je na slici 3, a detalj mreže elemenata koji opisuju zub pile prikazan je na slici 4. Model je opterećen centrifugalnom silom i silama na tri zuba.

Model lista kružne pile opterećen je istodobnim djelovanjem centrifugalnih sila koje odgovaraju frekvenciji vrtnje od  $n=3000$  min<sup>-1</sup>, dok su zubi pile zbog izračunanoga malog opterećenja pri rezanju opterećeni silama koje djeluju na reznu površinu zuba u ukupnom iznosu od 100 N. Slični su modeli napravljeni za svih sedam pila.

4.2. Analiza naprezanja zbog centrifugalne sile pri rotaciji ravne simetrične kružne ploče  
4.2. Analysis of stress caused by centrifugal force in rotation of flat symmetric circular board

Izračun raspodjele naprezanja lista kružne pile zbog djelovanja centrifugalne sile oslanja se na proračun naprezanja homogene kružne ploče sa središnjim provrtom za prihvat. Kružna je ploča stalnoga i *Poissonova* koeficijenta. Kružna ploča vanjskoga promjera  $D_a$  i debljine  $H$  pričvršćena je dvijema prirubnicama promjera  $D_e$ . Te se neelastične prirubnice u mehanici promatraju kao kruto tijelo. Za sva naprezanja vrijedi *Hookeov zakon*. Nadalje za ravnu kružnu ploču pretpostavlja se da je raspored naprezanja po presjeku simetričan i stalan. Na slici 5. dan je element kružne ploče s rasporedom naprezanja.

Pri rotaciji lista kružne pile pojavljuju se *tangencijalna* ili *posmična* ( $\sigma_t$ ) i *radijalna* ( $\sigma_r$ ) naprezanja. Pomoću uvjeta ravnoteže između radijalnih i tangencijalnih naprezanja, predočenih na slici 5. može se napisati

$$\left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) \cdot d\varphi - \sigma_r r d\varphi - 2\sigma_t \sin \frac{d\varphi}{2} dr + R \cdot r \cdot dr d\varphi = 0 \quad (1)$$

pri čemu je  $R$  obujamska radijalna sila. Označimo li sa  $u_r$  pomak u radijalnom

smjeru kao funkciju polumjera, a deformaciju u radijalnom smjeru  $s_r$ , pomoću Hookeova zakona za ravninsko naprezanje može se napisati jednadžba

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \cdot \sigma_t) \quad (2)$$

$$\varepsilon_t = \frac{u_r}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu \cdot \sigma_r)$$

Uzimaju

ći u obzir pretpostavku da kružna ploča ima stalnu temperaturu, integriranjem te određivanjem stalnica iz rubnih uvjeta, kako je naveo Risović (1999), dobiva se izraz za izračun radijalnih i posmičnih naprezanja lista kružne pile

$$\sigma_r = \frac{\rho \cdot \omega^2}{8} \left[ K_2(1+\nu) - r^2(1+3\nu) + \left(\frac{r_c}{r}\right)^2 (1-\nu)(r_c^2 - K_2) \right]$$

$$\sigma_t = \frac{\rho \cdot \omega^2}{8} \left[ K_2(1+\nu) - r^2(1+3\nu) + \left(\frac{r_c}{r}\right)^2 (1-\nu)(r_c^2 - K_2) \right]$$

pri čemu je

$$K_2 = \frac{r_a^4(3+\nu) + r_c^4(1-\nu)}{r_a^2(1+\nu) + r_c^2(1-\nu)}$$

## 5. Rezultati izračuna 5. Calculation results

### 5.1. Proračun naprezanja lista pile zbog djelovanja centrifugalne sile

### 5.1. Calculation of saw blade stress caused by centrifugal force

Uz pretpostavku da kružna ploča ima stalnu temperaturu te primjenjujući (2) za dobivanje diferencijalne jednadžbe, a potom dvostrukim integriranjem nastaje izraz za funkciju pomaka u radijalnom smjeru

$$u_r = -\frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{1}{r} \int \left[ r \int R(r) dr \right] \cdot dr + C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}$$

U tome slučaju obujamska radijalna sila  $R$  ima značenje centrifugalne sile, stoga proizlazi

$$R(r) = \omega^2 \cdot r \cdot \rho \quad (6)$$

U toj je jednadžbi 3 kutna frekvencija rotirajućeg diska.

Ako se uvrsti jednadžba (6) u (5) i izvrši dvostruko integriranje, izraz za radijalni pomak glasi

$$u_r = -\frac{(1-\nu^2)\omega^2 \cdot \rho}{8E} \cdot r^3 + C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} \quad (7)$$

Radi pojednostavnjenja izraza (7),

$$\text{uvodi se faktor } K_1 = \frac{(1-\nu^2)\omega^2 \cdot \rho}{8E}$$

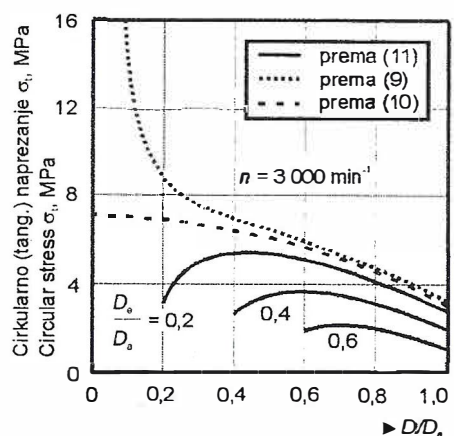
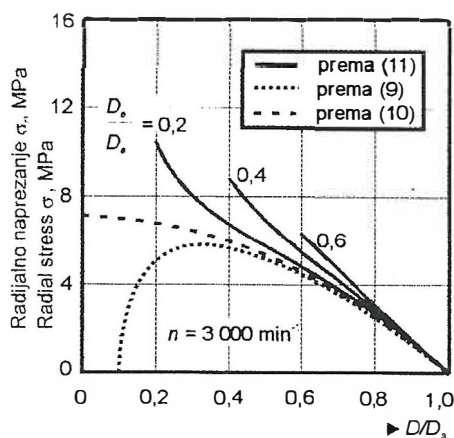
Izraz za radijalni pomak zbog djelovanja centrifugalne sile glasi

$$u_r = -K_1 \cdot r^3 + C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} \quad (8)$$

Nakon određivanja stalnica  $C_1$  i  $C_2$  za radijalni pomak, a koristeći se jednadžbom (2), dobiva se izraz (3) i (4) za izračun radijalnih i posmičnih naprezanja lista kružne pile.

Na osnovi navedenih pretpostavki te izraza za radijalno (3) i cirkularno naprezanje (4) oni su izračunani za različite uvjete.

Na slici 6. prikazano je radijalno i cirkularno naprezanje lista kružne pile u ovisnosti o različitim frekvencijama vrtnje kada je promjer prirubnice 120 mm ili  $D_e = 0,4 D_a$ . Sva su izračunana naprezanja vlačna. Najveće radijalno naprezanje nastaje neposredno uz prirubnicu i gotovo se linearno smanjuje na nulu na rubu lista pile. Primjetan je najveći porast naprezanja s frekvencije vrtnje 1 000  $\text{min}^{-1}$  na 2 000  $\text{min}^{-1}$ , pri čemu naprezanje četverostruko povećalo, od 1 MPa na 4 MPa. Isti su odnosi nastali i pri promjeni frekvencije vrtnje s 2 000  $\text{min}^{-1}$  na 4 000  $\text{min}^{-1}$ , što je u skladu s izrazom (3) i (4) gdje je promjenjiva veličina samo  $3^2$ . Najveća cirkularna naprezanja u promatranome slučaju pojavljuju se neposredno uz prirubnicu ili  $D_e \approx 0,5 D_a$ .



Slika 8.

Theorijsko radijalno i cirkularno (tangencijalno) naprezanje u listu kružne pile zbog centrifugalne sile u ovisnosti o odnosu promjera za različite rubne uvjete: MPa,  $D_a = 300$  mm,  $D_i = 30$  mm,  $D_e$  - promjenjiv • Theoretical radial and circular (tangential) stress in circular saw blade caused by centrifugal force depending on diameter ratio for different edge conditions: MPa,  $D_a = 300$  mm,  $D_i = 30$  mm,  $D_e$  - changeable





tome slučaju

$$\begin{aligned} r = r_a &\Rightarrow \sigma_r = 0 \\ r = 0 &\Rightarrow u_r = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

S obzirom na to da je kružna ploča (list pile) osigurana dvjema krutim prirubnicama promjera  $D_e$ , za ovaj slučaj vrijede granični uvjeti ako je

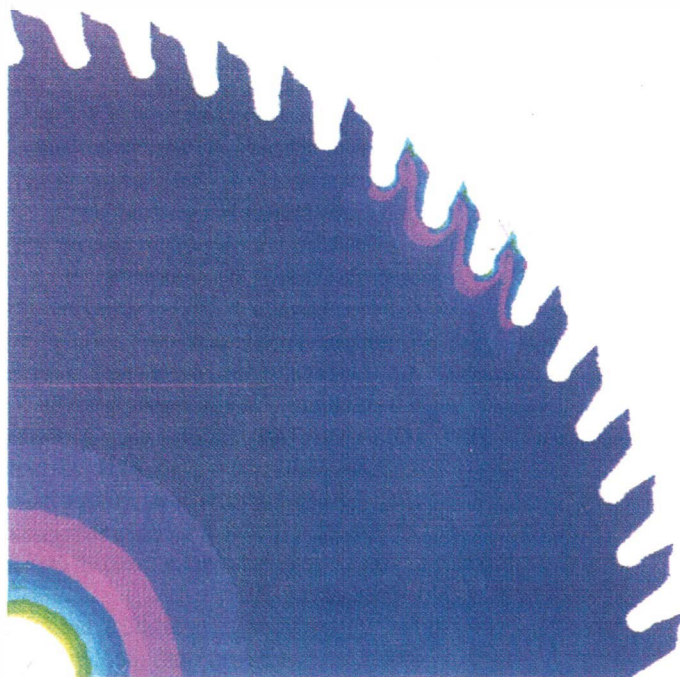
$$\begin{aligned} r = r_a &\Rightarrow \sigma_r = 0 \\ r = r_c &\Rightarrow u_r = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Pritom je u izrazu (10) i (11)  $u_r$  radijalni pomak.

Pri rotaciji kružne ploče frekvencijom vrtnje  $n = 3\,000 \text{ min}^{-1}$ , sa središnjim provrtom promjera 30 mm i ostalim dimenzijama vezanim za rotirajući disk najveća su cirkularna naprezanja na rubu provrta i iznose 16 MPa (sl. 8).

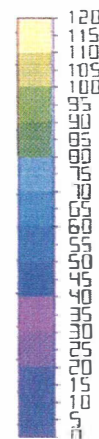
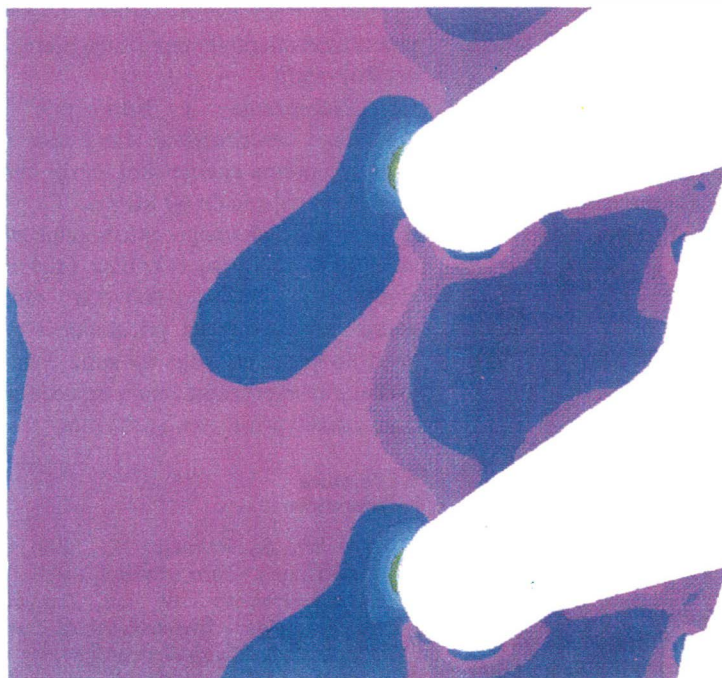
5.2. Proračun naprezanja lista kružne pile metodom konačnih elemenata  
5.2. Stress calculation of circular saw blade by method of finite elements

Geometrija zuba kružne pile relativno je složena, tako da se uobičajenim analitičkim metodama mogu odrediti samo



Slika 11.

Raspodjela naprezanja u MPa prema energetske teoriji čvrstoće (HMH) u listu pile 6. zbog djelovanja centrifugalne sile i opterećenja zubi pile silama od 100 N • Distribution of stress in MPa according to the energy theory of strength (HMH) in the blade of saw 2 caused by centrifugal force and saw teeth load by forces of 100 N



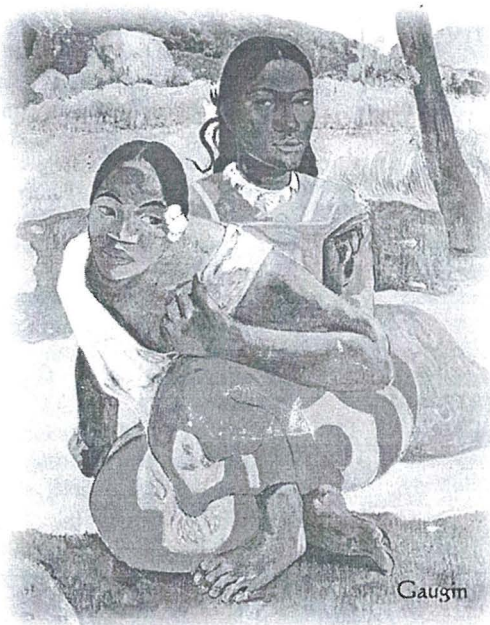
Slika 12.

Raspodjela naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (HMH) oko zuba pile 6. zbog opterećenja zuba silom od 100 N • Distribution of stress according to the energy theory of strength (HMH) around the teeth of saw 2 caused by teeth load of 100 N force



- goslavenski leksikografski zavod "Miroslav Krleža", sv. IX, Zagreb, str. 277 - 324.
3. Chabrier, P., Martin, P., 1999: An overview of methods for monitoring circular saw blade preparation, Holz als Roh- und Werkstoff **57**, str. 157 - 163.
  4. Gorman, D. G., Kennedy, W., Huissoon, J. P., 1980: Experimental Analysis of Transverse Vibration in Thermally Stressed Rotating Discs, Journal of Sound and Vibration **73** (2), str. 211-223.
  5. Jecić, S., 1990: Teorija elastičnosti, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, str. 133 - 168.
  6. Nicoletti, N., Fendeleur, D., Nilly, L., Renner, M., 1996: Using Finite Elements to model circular saw roll tensioning, Holz als Roh- und Werkstoff **54**, str. 99-104.
  7. Pahlitzsch, G., 1967: Aspects of Chain Saw cutting. Wood Machining Seminar, Forest Products Laboratory, Richmond, October, 10-11, str. 38-56.
  8. Pahlitzsch, G., Friebe, E., 1971A: Einfluß der Schnittbedingungen auf das Schwingungsverhalten und die Beanspruchung der Sägeblätter, Erste Mitteilung: Über das Verhalten von Kreissägeblättern im Schnitt, Holz als Roh- und Werkstoff **29**, str. 149 - 157.
  9. Pahlitzsch, G., Friebe, E., 1971B: Einfluß der Schnittbedingungen auf die Güte gesägter Holzoberflächen, Zweite Mitteilung: Über das Verhalten von Kreissägeblättern im Schnitt, Holz als Roh- und Werkstoff **29**, str. 265-269.
  10. Pahlitzsch, G., Friebe, E., 1973: Über das Vorspannen von Kreissägeblättern, Erste Mitteilung, Holz als Roh- und Werkstoff **31**, str. 429-436.
  11. Risović, S., 1999: Ovisnost kakvoće piljenja drva o naprezanjima u listu kružne pile, I. Analiza utjecajnih čimbenika na kakvoću piljenja drva, Drvna industrija **50**(1), str. 19 - 29.
  12. Stakhiev, Y. M., 1999: Research on circular saws roll tensioning in Russia: Practical adjustment methods, Holz als Roh- und Werkstoff **57**, str. 57 - 62.

*Autor zahvaljuje mentoru prof. dr. sc. Vladi Goglia na pomoći kod pripreme ovoga rada koji predstavlja izvadak iz njegove disertacije.*  
*Author expresses his gratitude to the mentor, Prof. Dr. Vlado Goglia, for help in preparation of this paper, which formed a part of his doctoral thesis.*



# Egzotično je oduvijek bilo privlačno

Od svojih početaka, još tamo davne 1928. godine, u dvorištu Jurišičeve 19 (današnja Rotonda) nadomak Jelačić placu, FURNIR je postao vodeći hrvatski trgovac kvalitetnim drvom i proizvodima od drva.

Danas Vam možemo ponuditi preko 5000 artikala sa svih strana svijeta. Drvni proizvodi iz Indonezije, Tajlanda, Čilea ili Finske nisu nam više nepoznanica. Posebno bismo istakli našu bogatu ponudu egzotičnih klasičnih parketa, kojom se zbog širine, kvalitete i osobito cijene s razlogom ponosimo.

Pozivamo Vas da lakirane uzorke navedenih parketa pogledate u dućanu u Heinzelovoj ulici ili u našem novom, najvećem i najmodernijem DRVNOM CENTRU u Hrvatskoj, u Velikoj Gorici.

U ponudi imamo indonezijske vrste: aveni KEMPAS, žuti PUNAH, smeđe-crveni SILKWOOD, tamno smeđi ROYALWOOD, zlatno-smeđi GOLDEN LION; tajlandske vrste: svjetlo smeđi RUBBERWOOD, crveno RUŽINO DRVO, smeđi TEAK, čileanske vrste: CRVENI ULMO.

Dobro došli u Furnirov svijet drva

# FURNIR

Zagreb, FURNIR, Heinzelava 34, telefon: 01/45 52 133, fax: 01/ 46 60 180;  
AMG-FURNIR, Solinska cesta 84a, telefon: 021/21 29 12; Dubrovnik, BRASS DESIGN-FURNIR, Batala bb, telefon: 020/41 14 82;  
Osijek, LESNINA IGM-FURNIR, Ulica Jablanava bb, telefon: 031/17 81 26; Pula, BAESA INTERIJERI-FURNIR, Jeretova bb, telefon: 052/21 52 45;  
Pleternica, VEXTER-FURNIR, Kralja Zvonimira bb, telefon: 034/25 10 82